MAT-01330 Insinöörimatematiikka C3 (Kangas)
Tentti 27.02.2019

Tentissä EI saa käyttää laskinta tai muita tietoteknisiä apuvälineitä eikä taulukkokirjaa tai muuta kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma liitteenä.

1. (a) Laske integraali
$$\int x\cos(x)\,dx.$$
   (b) Määritä funktion
$$f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^3+x^2}$$
   se integraalifunktio $F(x)$, jolla $F(1) = 2$.

2. Tutki integraalitestillä suppeneeko sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}.$$

3. Määritä ne muuttujan x arvot, joilla potenssisarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}(x-1)^k$$
   suppenee.
   Vihje: Tarpeen vaatiessa voit näyttää, että $\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{\ln(k)}{k}$*, osoittamalla, että funktio* $f(y) = \frac{\ln(y)}{y}$ *on vähenevä, kun* $y \in [1, \infty)$.

4. Ratkaise alkuarvotehtävä
   (a)
$$y' - \frac{1}{x}y = x, \quad y(1) = 3.$$
   (b) Etsi yhtälön
$$y'' - 4y = e^{2x}$$
   yleinen ratkaisu.

C	C	Kaavoja	Insinöörimatematiikka C3
C	C		MAT-01330 / Kangas

1.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$

2. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

3. $D(fg) = f'g + fg'$, $D(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$.

4. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$, $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$.

5. Jos $\sum_{k=l}^{\infty} aq^k$ suppenee, niin $S = \frac{aq^l}{1-q}$.

6. Karakteristinen yhtälö: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Jos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, niin $y = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$.
Jos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, niin $y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$.
Jos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, niin $y = e^{\alpha x}(c_1\sin(\beta x) + c_2\cos(\beta x))$.