Usean muuttujan differentiaalilaskenta, Kurssikoe
4.3.2019

1. Osoita raja-arvon määritelmän nojalla että funktiolle $f(x, y) = xy + 2x + 2y + 1$ on voimassa
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 6.$$

2. Oletetaan että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva koko tasossa $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Laske funktion f suunnatun derivaatan suunnattu derivaatta pisteessä $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ suuntaan $\overline{a}^0 = (a_1, a_1)$, kun $\|\overline{a}^0\| = 1$.

   Ohje: Muista luentojen tulos $\partial_{\overline{a}^0} f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overline{a}_0$ suunnatulle derivaatalle.

3. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x + xy + y^2$. Etsi ainakin yksi piste $\overline{c} \in J$ pisteitä $\overline{a} = (0, 0)$ ja $\overline{b} = (2, 2)$ yhdistävältä janalta J siten että
$$f(\overline{b}) - f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{c}) \cdot (\overline{b} - \overline{a}).$$

4. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = -x^3 + y^3 + 3x^2 + y^2 + 1$$
mahdolliset lokaalit ääriarvopisteet ja tutki niiden luonne.