

TAMPEREEN YLIOPISTO

ITC/Matematiikka

Johdatus matemaattiseen päättelyyn

Loppukoe, 12.12.2019

1. Todista induktiolla:

(a) Kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  pätee  $4 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + \dots + 4 \cdot 5^n = 5^{n+1} - 1$ .

(b) Kaikilla  $n \in \mathbb{Z}_+$  pätee  $1 + 2 + 3 + \dots + n \leq n^2$ .

2. (a) Olkoot  $A = \{a, \emptyset\}$  ja  $B = \{a, b\}$ , missä  $a \neq \emptyset \neq b \neq a$ . Muodosta joukot  $\mathcal{P}(A)$ ,  $\mathcal{P}(B)$ ,  $\mathcal{P}(A) \setminus A$  ja  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ .

(b) Olkoot  $X$  ja  $Y$  joukkoja. Osoita, että  $X \subseteq Y$  jos ja vain jos  $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ .

3. Määritellään joukossa  $\{a, b, c, d\}$  relaatiot  $R = \{(a, a), (a, b), (c, d)\}$  ja  $S = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$ . Määritä relaatiot  $R \circ S$ ,  $S^{-1}$ ,  $r(R)$  (refleksiivinen sulkeuma),  $s(S)$  (symmetrinen sulkeuma),  $t(R)$  (transitiivinen sulkeuma) ja  $tsr(R)$  ( $= t(s(r(R)))$ ).

Piirrä myös polkukuviot!

4. (a) Olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaus, jolla  $f(x) = x^2$ . Määritä seuraavat kuva- ja alkukuvajoukot:  $f(\{-2, 2\})$ ,  $f^{-1}(\{-2, 2\})$ ,  $f([-2, 2])$  ja  $f^{-1}([-2, 2])$ .

(b) Olkoot  $f : X \rightarrow Y$  ja  $g : Y \rightarrow Z$  kuvauksia. Oletetaan, että  $g \circ f$  on bijektio. Osoita, että  $f$  on injektio ja  $g$  on surjektio.