**Tampereen yliopisto**
**Matematiikan peruskäsitteitä (MTTMY1)**
20.11.2019.
Tentaattori: Raine Rönnholm

Kokeessa ei saa olla käytössä laskinta eikä mitään materiaaleja.

LUE ENSIN NÄMÄ OHJEET HUOLELLA.

Tehtävien 2, 3 ja 4 vastaukset merkitään tähän kysymyspaperiin. Tehtäviin 1 ja 5 vastataan erilliselle konseptipaperille. Lisäksi voit käyttää apuna suttupaperia.

Tämän kokeen voi suorittaa joko tenttinä tai loppukokeena. Loppukoesuoritus edellyttää, että kurssin harjoitustehtävistä on kerättynä vähintään 40% maksimipisteistä.

LOPPUKOE: Tee tehtävät 1–4 (jätä tehtävä 5 tekemättä).
Loppukokeen arvostelussa huomioidaan myös harjoitushyvitys.

TENTTI: Tee tehtävät 1–5.

Merkitse suoritusmuoto:

| | |
|---|---|
| Loppukoe | |
| Tentti | |

Nimi ja opiskelijanumero:

**1.** Tutki totuustaulujen avulla pätevätkö alla olevat lauselogiikkaa koskevat väitteet. Perustele lisäksi vastauksesi lyhyesti. Kirjoita vastauksesi erilliselle konseptipaperille.

(a) Lause $(p \Rightarrow q \land \neg r) \Rightarrow \neg p \lor q$ on tautologia.

(b) Lauseet $\neg(p \Leftrightarrow q)$ ja $(\neg p \Rightarrow \neg q) \land (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ovat keskenään loogisesti ekvivalentit.

(c) Päättely $\dfrac{\begin{array}{c} p \lor q \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q}$ on pätevä.

**2.** Tarkastellaan seuraavia predikaattilogiikalla esitettyjä väitteitä. Merkitse luku yksi (1) tosien väitteiden kohdalle ja luku nolla (0) epätosien väitteiden kohdalle. Perusteluja ei tarvitse esittää.

| | | |
|---|---|---|
| (a) | $\exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \leq y$ | |
| | $\forall x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{Q} : x \leq y$ | |
| (b) | $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$ | |
| | $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \leq y$ | |
| (c) | $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : y < x$ | |
| | $\forall x \in \mathbb{R}_+ : \exists y \in \mathbb{R}_+ : y < x$ | |
| (d) | $\forall x \in \mathbb{R} : (0 \leq x \lor x \leq 0)$ | |
| | $(\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq x) \lor (\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 0)$ | |
| (e) | $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} : (x < y \land z < y)$ | |
| | $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{Z}_+ : (x = y \lor y = z)$ | |
| (f) | $\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : \big(x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : (x < z < y)\big)$ | |
| | $\forall x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{Q} : \big(x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} : (x < z < y)\big)$ | |

Jokaisesta alakohdasta saa pisteen vain jos kohdan kummankin väitteen kohdalla on oikea vastaus. Tyhjäksi jätetyt ruudut tulkitaan arvostelussa nolliksi.

**3.** Tarkastellaan joukkoja $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sekä relaatiota $R \subseteq \mathbb{N}^2$, joiden tiedetään toteuttavan seuraavat ehdot:

$$\{1,2,3\} \subseteq A$$
$$A \setminus B = \emptyset$$
$$\{(1,2),(2,3)\} \subseteq R$$

Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia, mitkä epätosia ja minkä totuusarvoa ei voi tietää annettujen tietojen perusteella? Merkitse rasti (X) oikean vaihtoehdon kohdalle. Perusteluja ei tarvitse esittää.

| | tosi | epätosi | ei voi tietää | | tosi | epätosi | ei voi tietää |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0 \in A$ | | | | $1 \in B$ | | | |
| $\emptyset \in A$ | | | | $\emptyset \subset B$ | | | |
| $\{1,2\} \in \mathcal{P}(A)$ | | | | $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ | | | |
| $(1,2) \in B \times B$ | | | | $R \subseteq A \times A$ | | | |
| $(1,2) \in R^{-1}$ | | | | $(1,3) \in R^2$ | | | |
| $(1,2) \in A \cap R$ | | | | $\{1,(1,2)\} \in \mathcal{P}(A \cup R)$ | | | |

Kustakin oikeasta vastauksesta saa puoli pistettä. Vääristä vastauksista ei tule miinuspisteitä, joten kaikkiin kohtiin kannattaa vastata.

**4.** Tarkastellaan seuraavia relaatioita:

$$
\begin{aligned}
R &= \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}\\
S &= \{(a,a),(a,b),(b,c),(d,d)\}\\
I &= \{(x,x) \mid x \in \mathbb{N}\}\\
F &= \mathbb{N} \times \mathbb{N}\\
T &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 42\}\\
U &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}
\end{aligned}
$$

Relaatiot $R, S$ on määritelty joukossa $\{a,b,c,d\}$, relaatiot $I, F$ joukossa $\mathbb{N}$ ja relaatiot $T, U$ joukossa $\mathbb{R}$.

Mitä seuraavista ominaisuuksista on yllä määritellyillä relaatioilla? Merkitse kuhunkin kohtaan luku yksi (1), mikäli relaatiolla on kyseinen ominaisuus ja luku nolla (0), mikäli relaatiolla ei ole kyseistä ominaisuutta. Perusteluja ei tarvitse esittää.

| | refl. | irrefl. | symm. | antis. | trans. | vert. | kuvaus |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ | | | | | | | |
| $S$ | | | | | | | |
| $I$ | | | | | | | |
| $F$ | | | | | | | |
| $T$ | | | | | | | |
| $U$ | | | | | | | |

Lyhenteet:
refl.= refleksiivinen, irref. = irrefleksiivinen, symm. = symmetrinen,
antis. = antisymmetrinen, trans. = transitiivinen, vert. = vertailullinen

Tyhjäksi jätetyt ruudut tulkitaan arvostelussa nolliksi.

VIIMEINEN TEHTÄVÄ KUULUU AINOASTAAN TENTTISUORITUKSEEN

**5.** Vastaa seuraaviin kysymyksiin lyhyesti, mutta täsmällisesti. Kirjoita vastauksesi erilliselle konseptipaperille.

(a) Mitä tarkoitetaan sillä, että lause $B$ on lauseen $A$ looginen seuraus (eli $A \models B$)? Entä voiko $A \models B$ päteä, jos $B$ on looginen ristiriita (eli kontradiktio)?

(b) Tarkastellaan joukkoa $A \subseteq X$ perusjoukossa $X$. Mitä tarkoitetaan joukon $A$ komplementilla $\overline{A}$? Entä milloin on voimassa $\overline{A} = \emptyset$?

(c) Mitä tarkoitetaan relaation $R \subseteq X^2$ transitiivisella sulkeumalla $t(R)$? Anna lisäksi esimerkki jostain relaatiosta $R$, jolle ei ole voimassa, että $t(R) = R \cup R^2$.

(d) Mitä ominaisuuksia on ekvivalenssirelaatiolla? Entä voiko ekvivalenssirelaatio olla osittainen tai täydellinen järjestys?

(e) Tarkastellaan kuvausta $f : X \to Y$. Mitä tarkoitetaan joukon $B \subseteq Y$ alkukuvien joukolla $f^{-1}(B)$? Entä milloin on voimassa $f^{-1}(B) = \emptyset$?

(f) Millainen kuvaus on injektio? Entä milloin injektiolla on käänteiskuvaus?