

**MATH.APP.160 Differentiaali- ja integraalilaskenta (Kangas)**  
**Tentti 11.5.2022**

Laskimen käyttö sallittu. Tietokoneen tai mobiilien internetlaitteiden käyttö ei ole sallittu. Kaavakokoelma liitteenä. Muista perustella välivaiheet!

1. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$xy' = y + 2x^2, \quad y(1) = 3.$$

2. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y'' + 2y' - 8y = x^2 + 1$$

yleinen ratkaisu.

3. (a) Laske osittaisintegrointia hyödyntäen

$$\int_0^{\pi} x \cos(3x) dx.$$

- (b) Laske osamurtokehitelmää hyödyntäen

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-2x} dx.$$

4. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} (x-2)^k$$

suppenemisväli. Muista tutkia myös päätepisteet.

# MATH.APP.160 Differentiaali- ja integraalilaskenta

## Kaavakokoelma

1. Integroimiskaavoja:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$e^x$	$e^x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Huom! Muista integroimisvakio määräämättömässä integraalissa.

2.  $D(fg) = f'g + fg'$ ,  $D(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$

3.  $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$ ,  $A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} dx$ ,  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

4. Jos  $\sum_{k=m}^{\infty} aq^k$  suppenee, niin  $S = \frac{aq^m}{1-q}$ .

5. (a) Jos  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ , niin  $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ .

(b) Jos  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ja  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , niin  $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ .

(c) Jos  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , niin  $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$ .

6.

$f(x)$	$y_p(x)$
polynomi	polynomi
$ke^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$ , jos $\alpha$ ei ole karakteristisen yhtälön (KY) ratkaisu. $Axe^{\alpha x}$ , jos $\alpha$ on KY:n yksinkertainen ratkaisu. $Ax^2 e^{\alpha x}$ , jos $\alpha$ on KY:n kaksinkertainen ratkaisu.
$a \cos(\omega x)$ $b \cos(\omega x)$	$A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ , jos $\pm \omega i$ ei ole KY:n ratkaisu

Huom! Jos  $f(x)$  on useamman taulukossa mainitun funktion lineaarikombinaatio, niin tällöin yritteeksi kannattaa ottaa vastaavien yritteiden lineaarikombinaatio.

7.  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

8.  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ ,  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$